



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

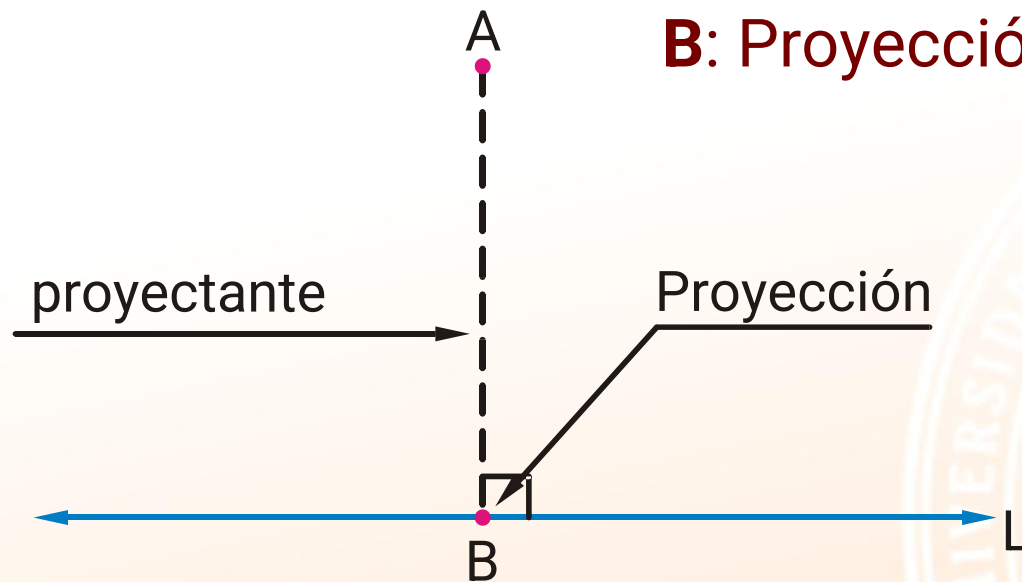
RELACIONES MÉTRICAS DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

**CICLO
PRE
2024-1**



PROYECCIÓN ORTOGONAL

Definición.- La proyección ortogonal de un punto sobre una recta, es el pie de la perpendicular trazada desde el punto a la recta dada.



B: Proyección ortogonal del punto A sobre la recta L

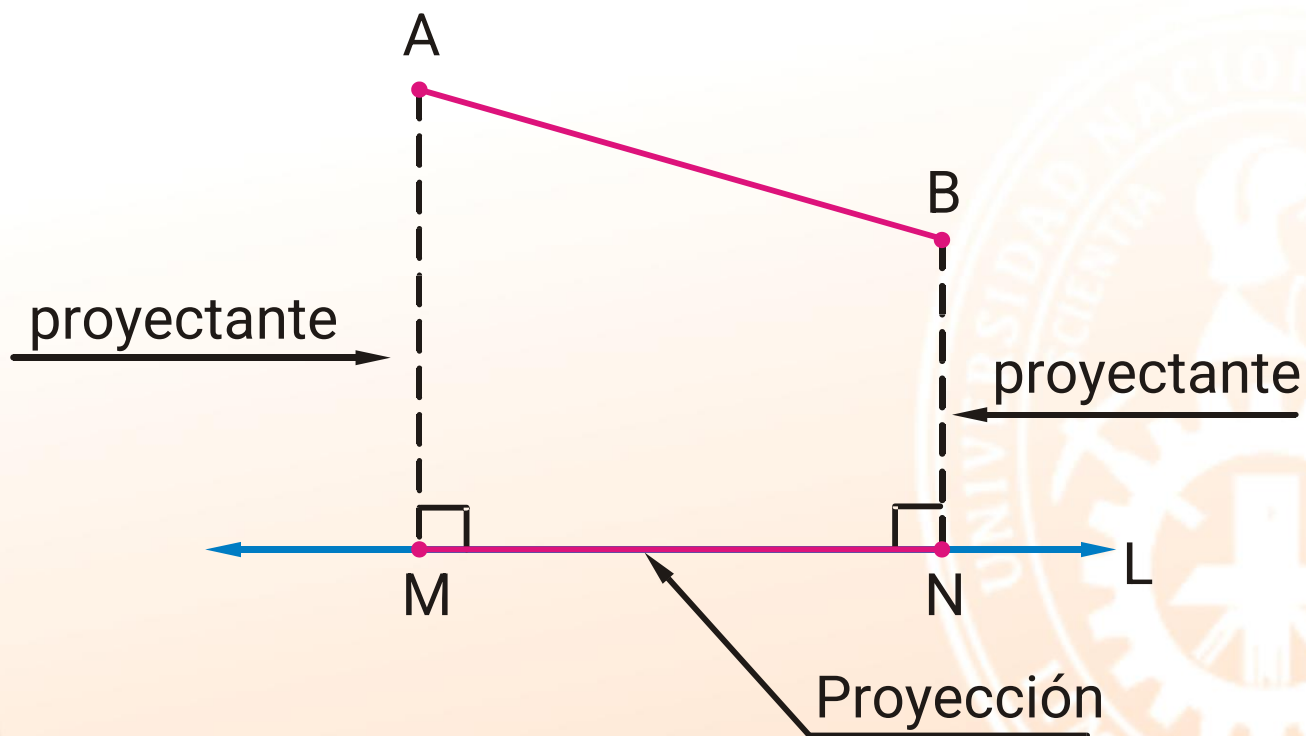
$\overline{AB}$: Proyectante

Notación

$\text{Proy}_L A = B$

Observación.- Si el punto está en la recta, su proyección sobre la recta es el mismo punto

Definición.- La proyección ortogonal de un **segmento** sobre una recta, es el conjunto de puntos formado por las proyecciones ortogonales de todos los puntos del segmento en la recta dada.

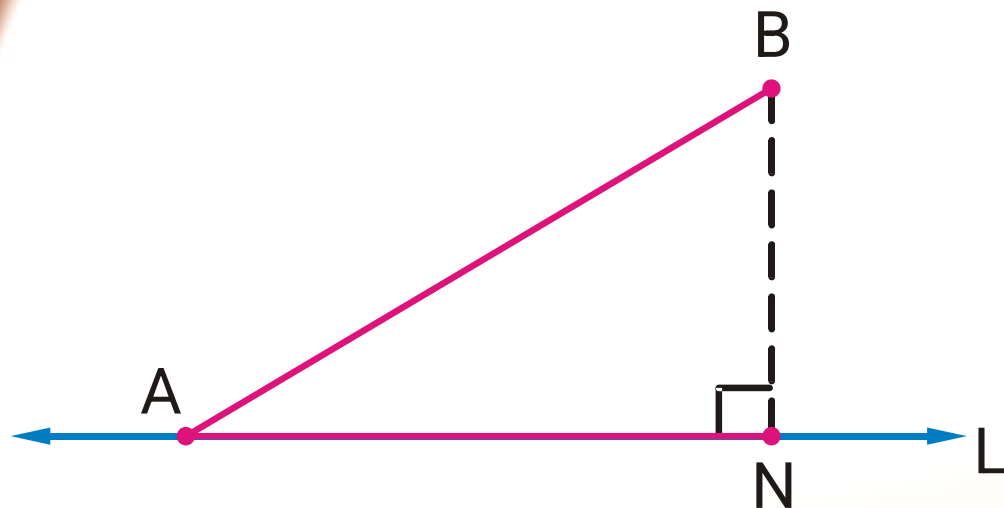


$\overline{MN}$: proyección de $\overline{AB}$

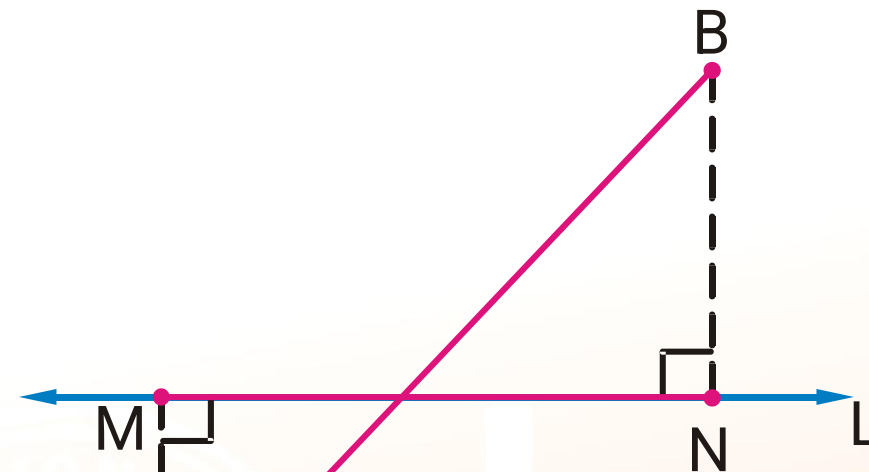
$\overline{AM}$ y $\overline{BN}$: proyectantes

Notación

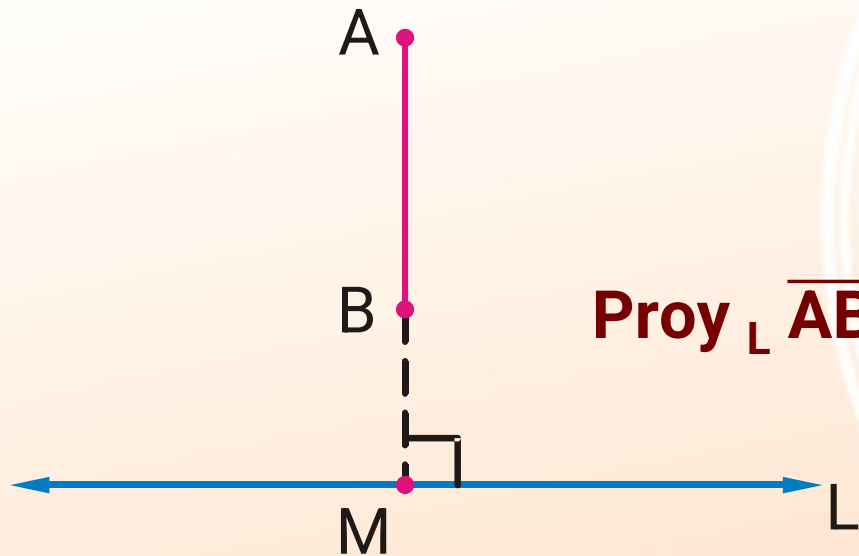
$$\text{Proy}_L \overline{AB} = \overline{MN}$$



$$\text{Proy}_L \overline{AB} = \overline{AN}$$



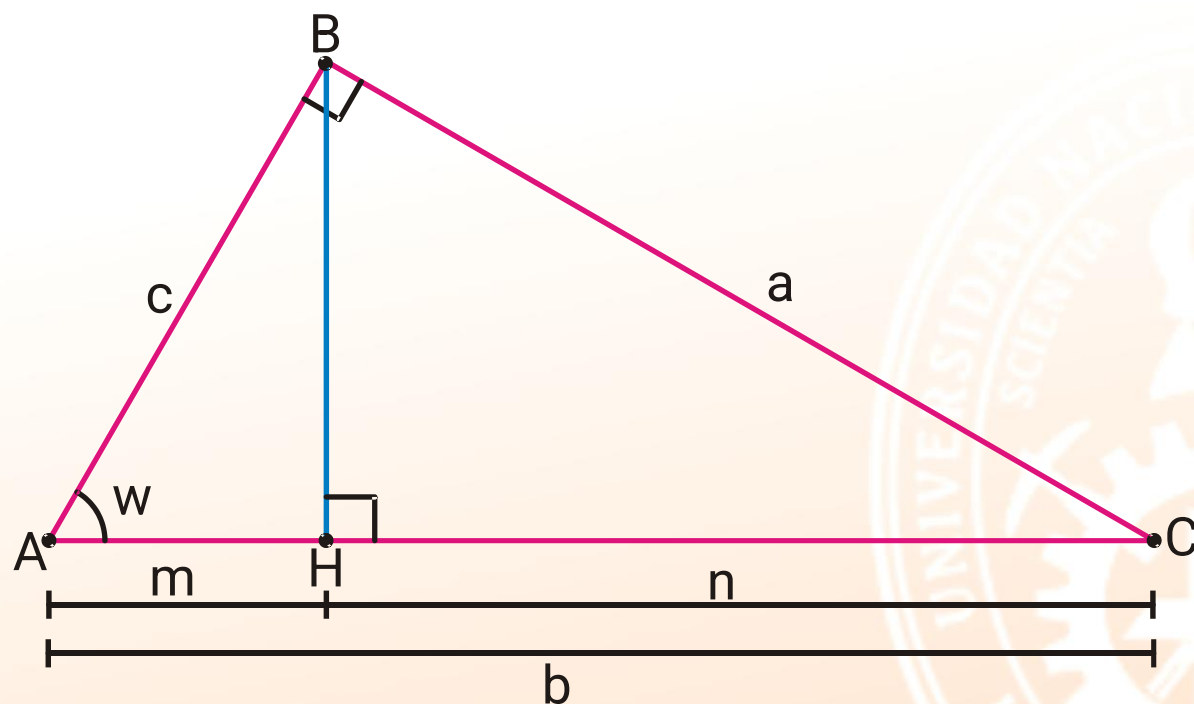
$$\text{Proy}_L \overline{AB} = \overline{MN}$$



$$\text{Proy}_L \overline{AB} = M$$

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Teorema.- En un triángulo rectángulo, la longitud de cada cateto es media proporcional entre las longitudes de la hipotenusa y su proyección sobre la hipotenusa.



$$c^2 = bm$$

$$a^2 = bn$$

Demostración

$$\triangle AHB \sim \triangle ABC$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{m}{c}$$

$$\therefore c^2 = bm$$

EJERCICIO 01

En un triángulo ABC recto en B, con centro en B y radio $\overline{AB}$ se traza una circunferencia que interseca a $\overline{AC}$ en el punto P. Si $AP = 2\text{ u}$ y $PC = 7\text{ u}$, entonces la longitud (en u) del radio de la circunferencia es

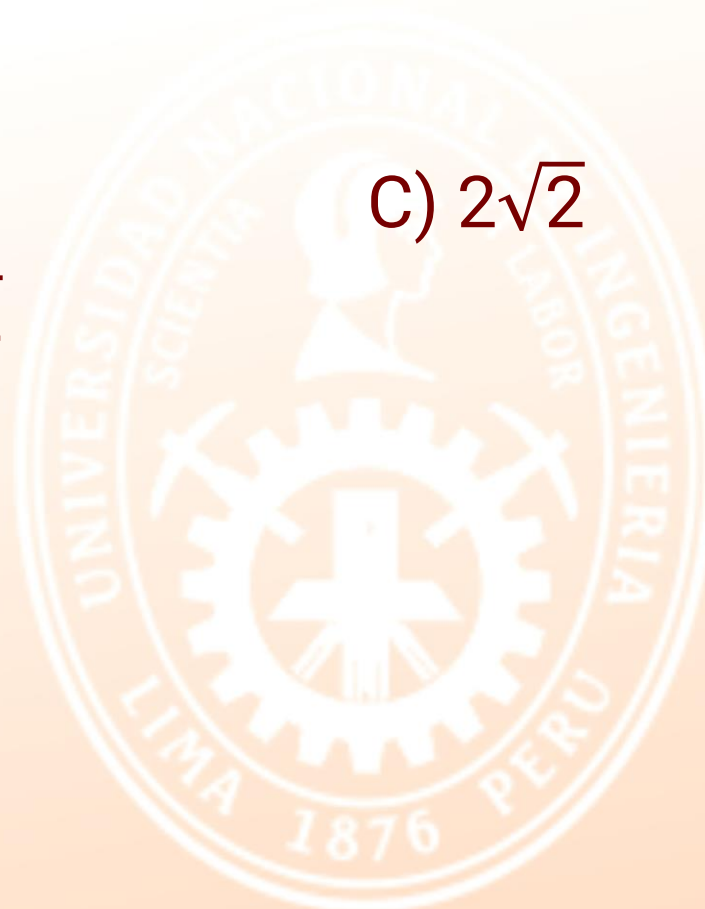
A) 2,0

B) 2,2

C) $2\sqrt{2}$

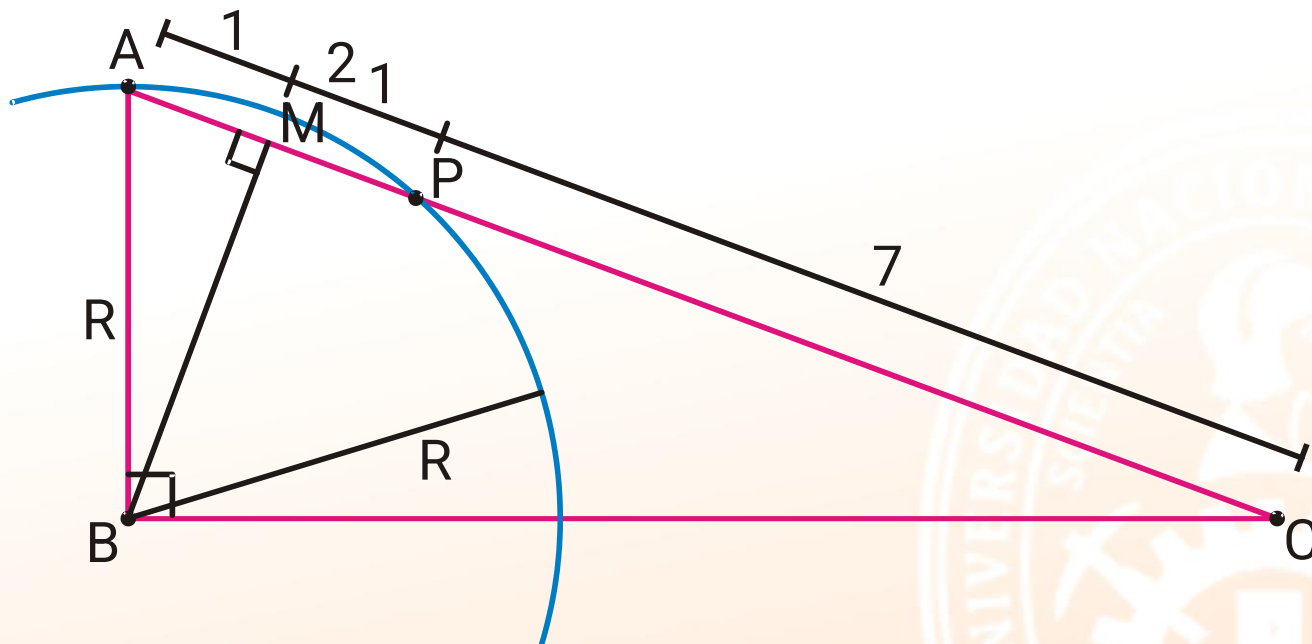
D) 3,0

E) $3\sqrt{2}$



RESOLUCIÓN 01

En un triángulo ABC recto en B, con centro en B y radio $\overline{AB}$ se traza una circunferencia que interseca a $\overline{AC}$ en el punto P. Si $AP = 2u$ y $PC = 7u$, entonces la longitud (en u) del radio de la circunferencia es



$$AB = R$$

$$AM = MP = 1$$

$$\triangle ABC: R^2 = (AC)(AM)$$

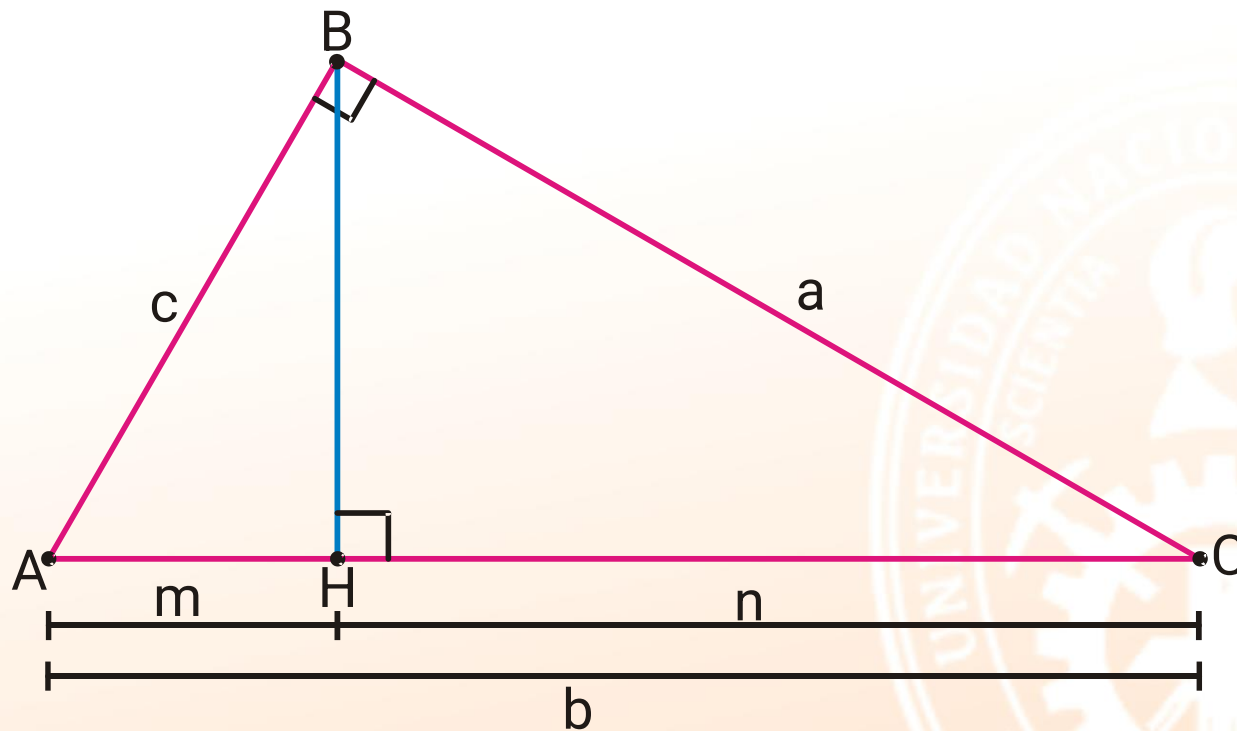
$$R^2 = (9)(1)$$

$$R = 3$$

Clave: D

Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.



$$a^2 + c^2 = b^2$$

Demostración

Teorema: $c^2 = bm$

$$a^2 = bn$$

sumando $a^2 + c^2 = bm + bn$

$$a^2 + c^2 = b(m + n)$$

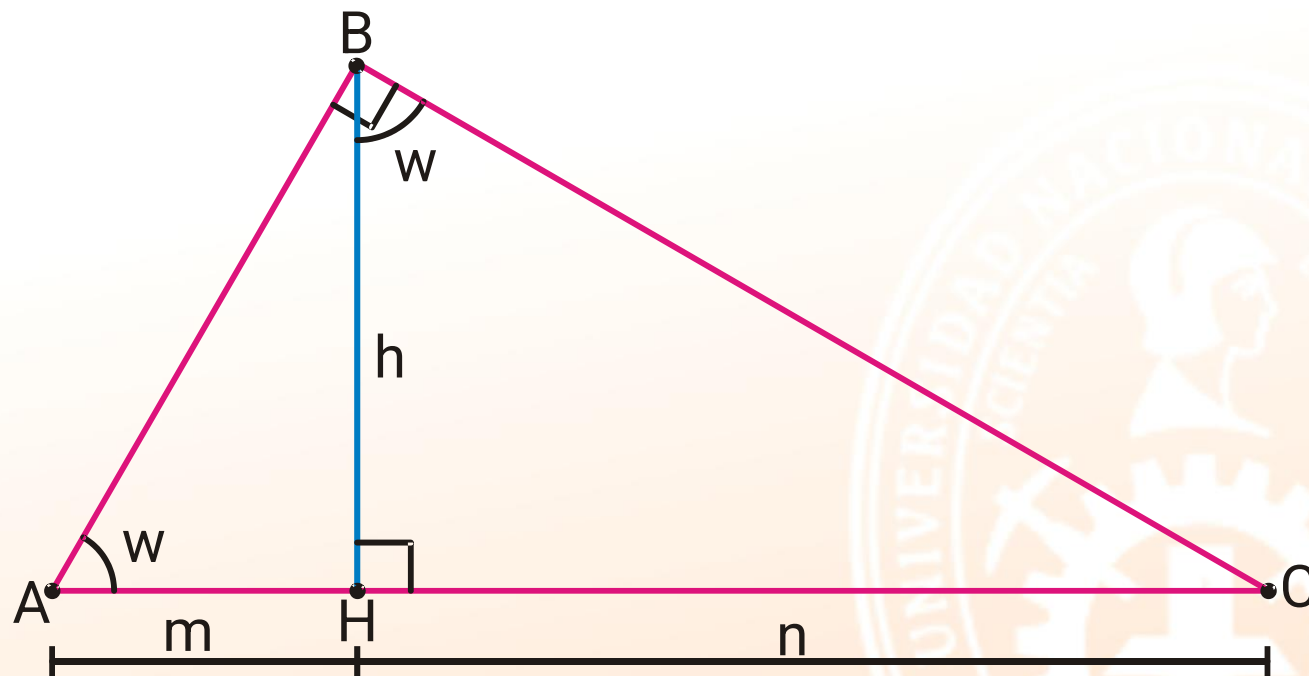
$$b = m + n$$

$$a^2 + c^2 = b(b)$$

$$\therefore a^2 + c^2 = b^2$$

Teorema

En un triángulo rectángulo, la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre las longitudes de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.



$$h^2 = m n$$

Demostración

$$m\angle A = m\angle HBC = w$$

$$\triangle AHB \sim \triangle BHC$$

$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h}$$

$$\therefore h^2 = mn$$

EJERCICIO 02

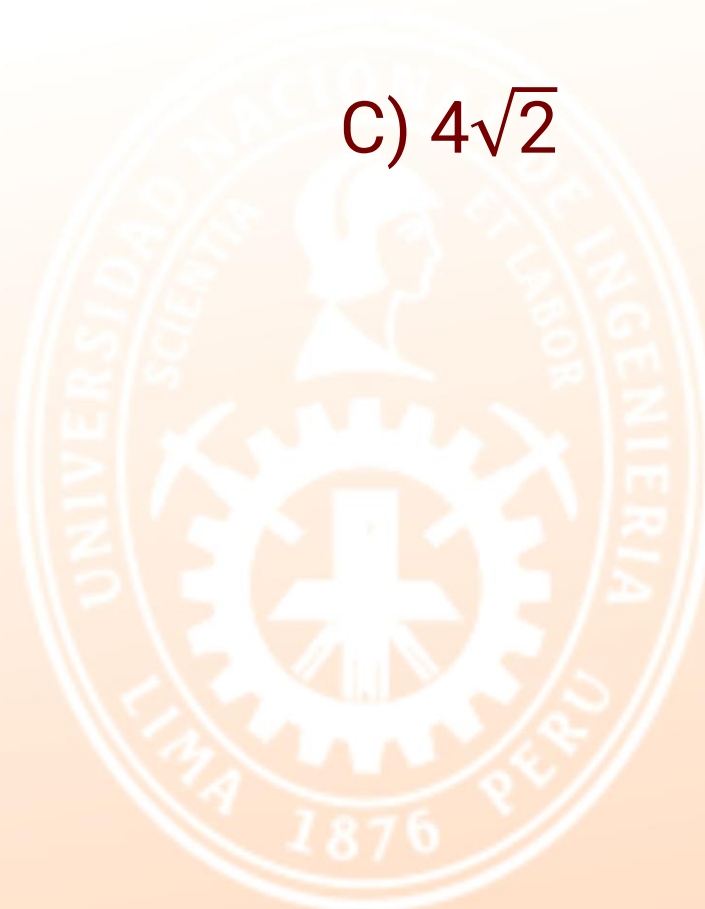
En un triángulo ABC recto en B, M es punto medio de $\overline{BC}$, se traza $\overline{MP}$ perpendicular a $\overline{AC}$ en el punto P. Si $AP = 6$ u y $PC = 4$ u, entonces la longitud de $\overline{BP}$ es

A) 3

B) 4

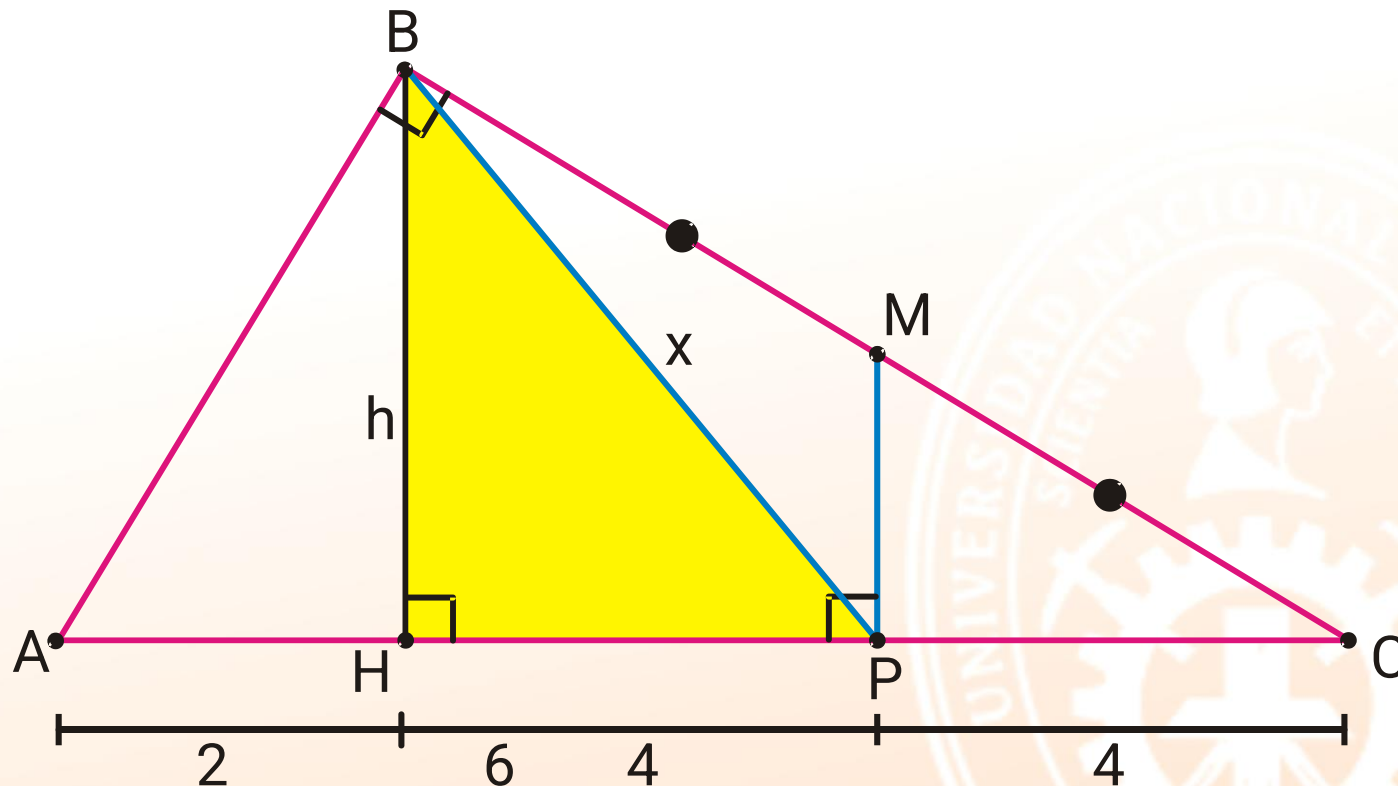
C) $4\sqrt{2}$

D) 5

E) $5\sqrt{2}$ ce
pre
UNI

EJERCICIO 02

En un triángulo ABC recto en B, M es punto medio de $\overline{BC}$, se traza $\overline{MP}$ perpendicular a $\overline{AC}$ en el punto P. Si $AP = 6$ u y $PC = 4$ u, entonces la longitud de $\overline{BP}$ es



$$BP = x$$

$$HP = PC = 4$$

$$\triangle ABC: h^2 = (AH)(HC)$$

$$h^2 = (2)(8)$$

$$h = 4$$

$$\triangle BHP: x^2 = h^2 + 4^2$$

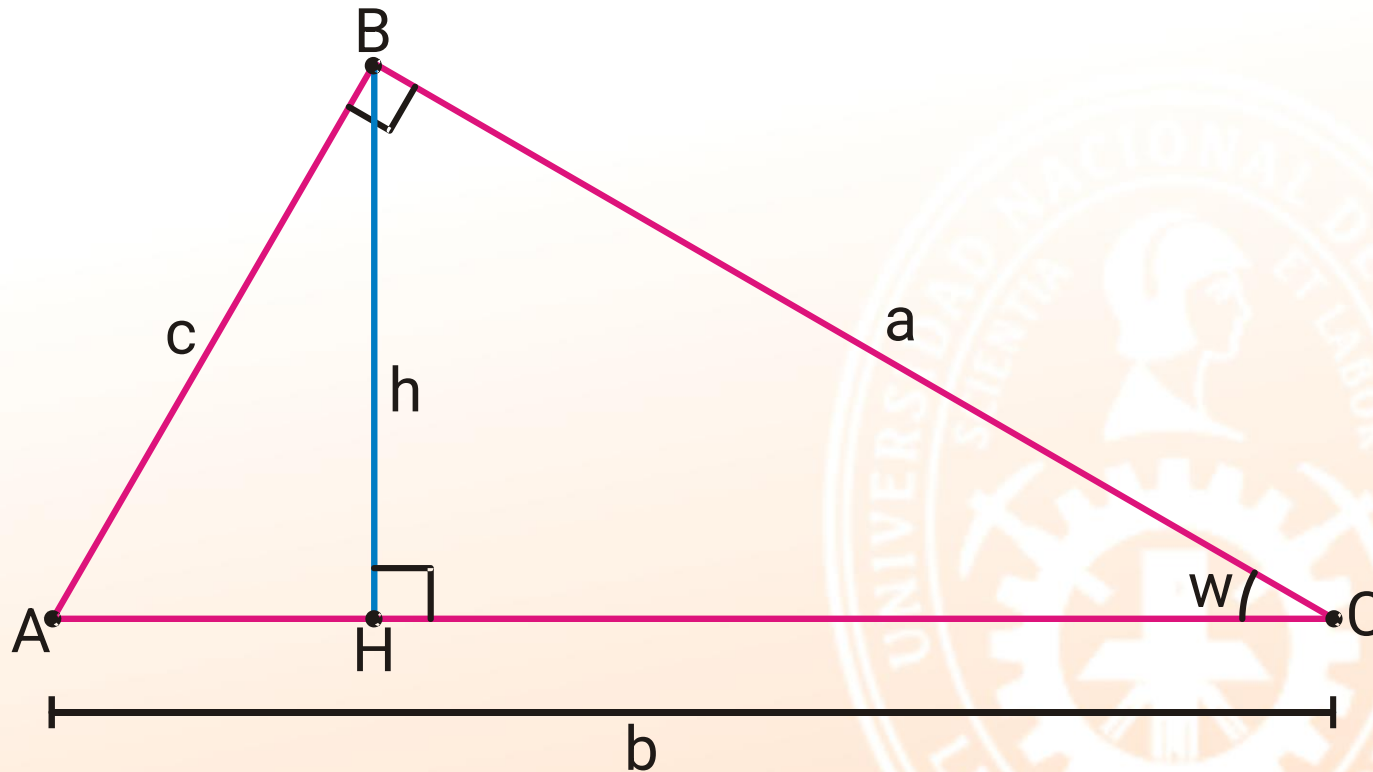
$$x^2 = 4^2 + 4^2$$

$$x = 4\sqrt{2}$$

Clave: C

Teorema

En un triángulo rectángulo, el producto de las longitudes de los catetos es igual al producto de las longitudes de la hipotenusa y la altura relativa a la hipotenusa.



$$a c = b h$$

Demostración

$$\triangle ABC \sim \triangle BHC$$

$$\frac{c}{h} = \frac{b}{a}$$

$$\therefore a c = b h$$

EJERCICIO 03

En un trapecio $ABCD$ ($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$), las diagonales son perpendiculares. Si el producto de las longitudes de las diagonales es 48 u^2 y la suma de las longitudes de las bases es 10 u , entonces la longitud (en u) de la altura del trapecio es

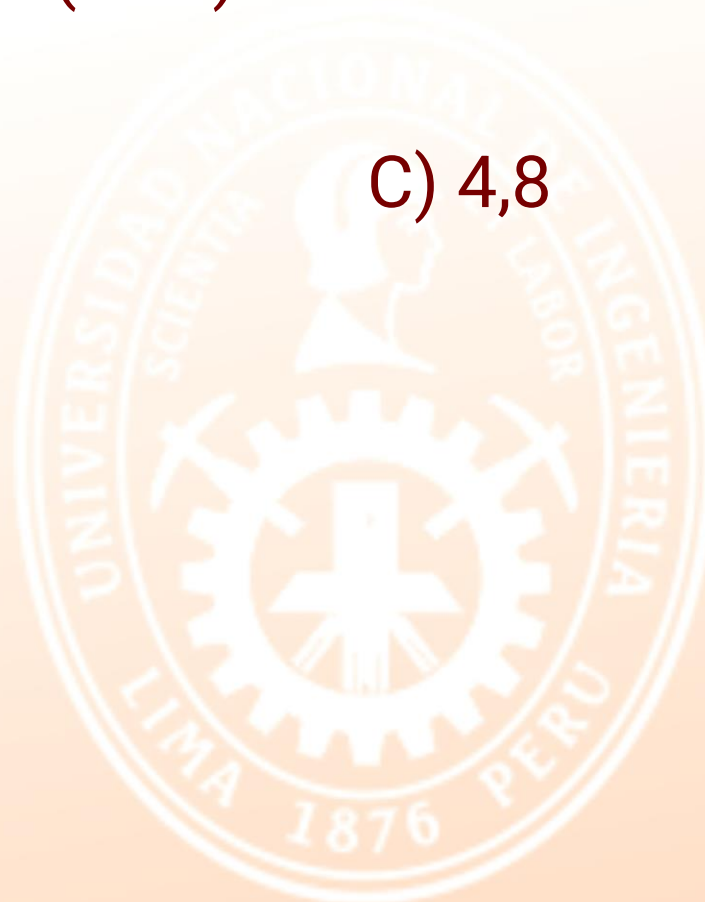
A) 2,4

B) 3,6

C) 4,8

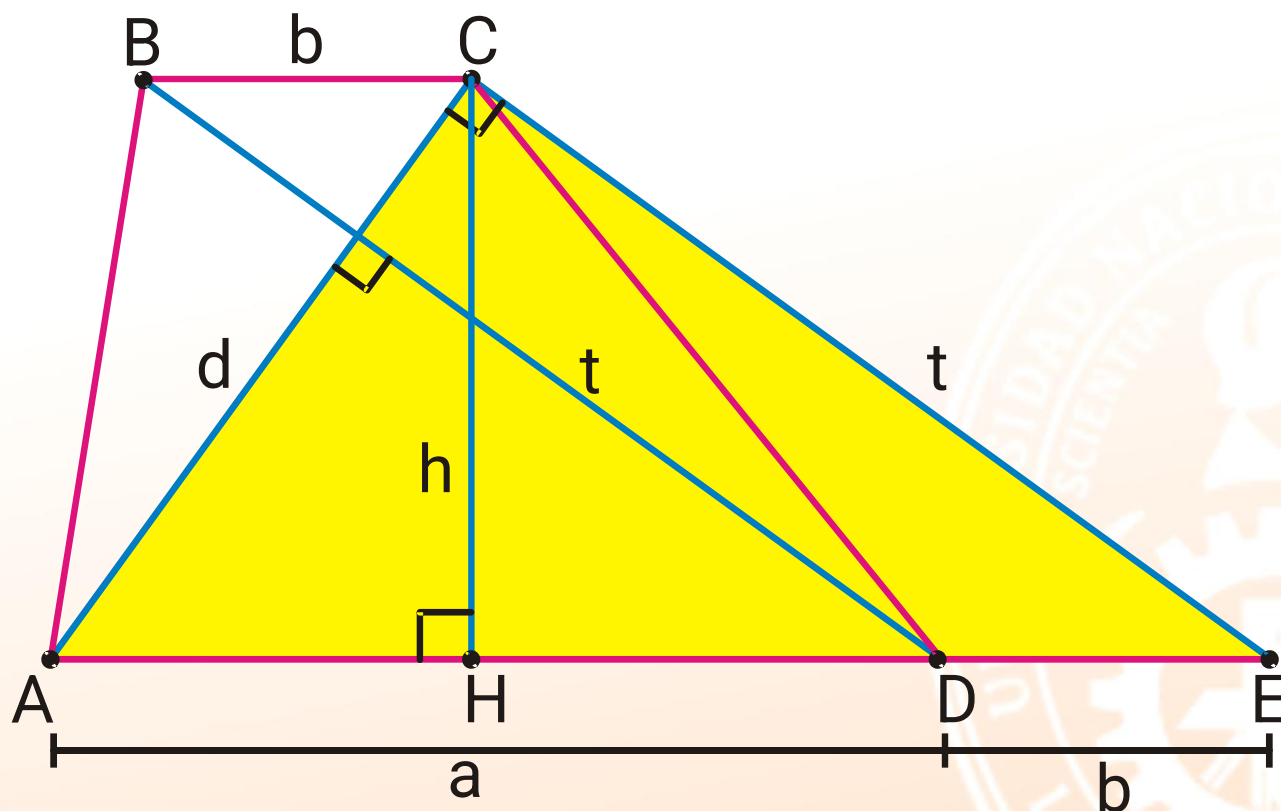
D) 6,0

E) 7,2



RESOLUCIÓN 03

En un trapezio ABCD ($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$), la diagonales son perpendiculares. Si el producto de las longitudes de las diagonales es 48 u^2 y la suma de las longitudes de las bases es 10 u , entonces la longitud (en u) de la altura del trapezio es



$$(AC)(BD) = dt = 48$$

$$BC + AD = a + b = 10$$

$$CH = h$$

BCED: paralelogramo

$$BC = ED = b \text{ y } BD = CE = t$$

$$m\angle ACE = 90$$

$$\triangle ACE : (AC)(CE) = (AE)(CH)$$

$$d.t = (a + b)(h)$$

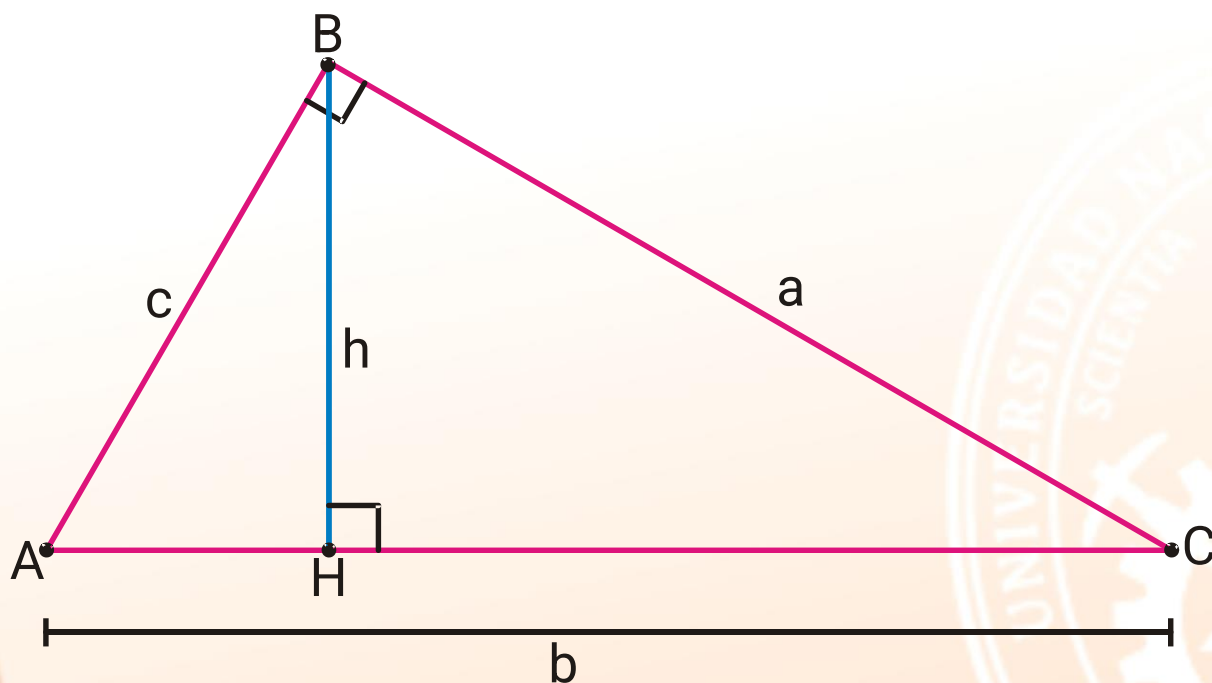
$$48 = (10)(h)$$

$$h = 4,8$$

Clave: C

Teorema

En un triángulo rectángulo, la suma de las inversas de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual a la inversa del cuadrado de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa



$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$$

Demostración

Teorema $a c = b h$

$$a^2 c^2 = b^2 h^2$$

Teorema $a^2 + c^2 = b^2$

$$A^2 c^2 = (a^2 + c^2) h^2$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{a^2 + c^2}{a^2 c^2} \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{c^2}{a^2 c^2} + \frac{a^2}{a^2 c^2}$$

$$\therefore \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}$$

EJERCICIO 04

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$, en $\overline{HC}$ se ubica el punto M y se traza el cuadrado BHMN que interseca a $\overline{BC}$ en el punto L.. Si $\frac{1}{(BL)^2} + \frac{1}{(BC)^2} = \frac{1}{25} u^{-2}$ entonces el perímetro (en u) del cuadrado es

A) 16

B) 20

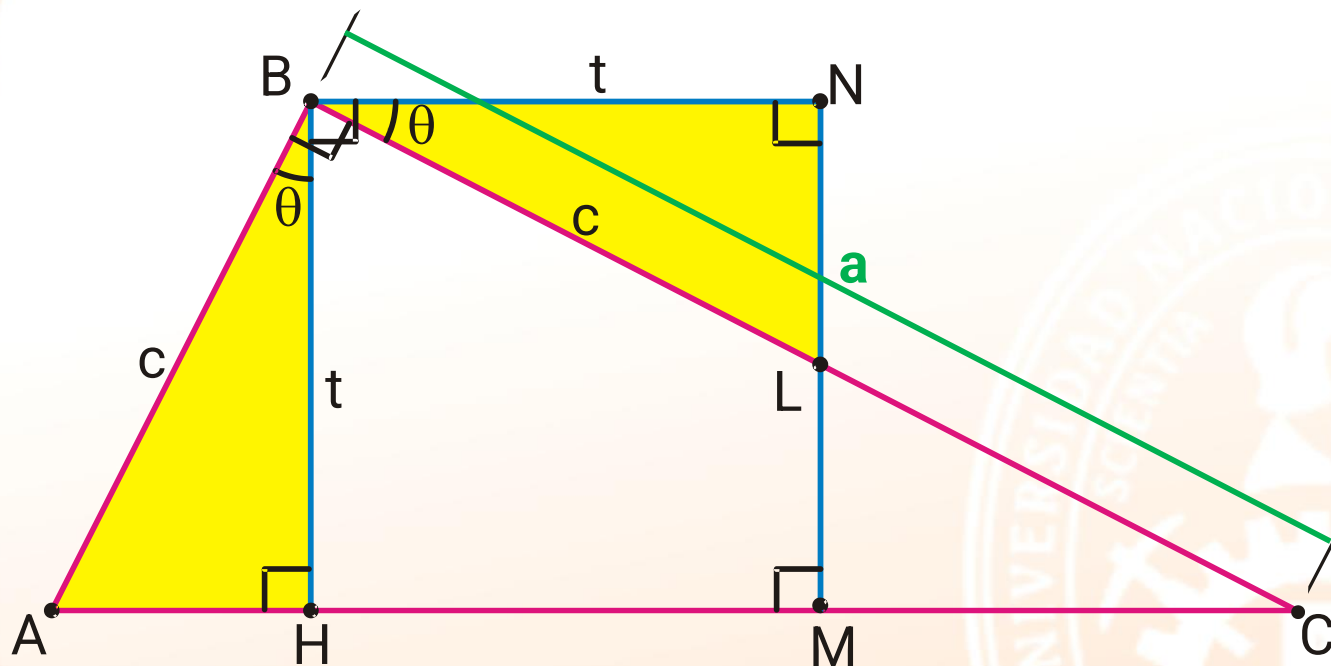
C) 24

D) 28

E) 32

RESOLUCIÓN 04

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$, en $\overline{HC}$ se ubica el punto M y se traza el cuadrado BHMN que interseca a $\overline{BC}$ en el punto L.. Si $\frac{1}{(BL)^2} + \frac{1}{(BC)^2} = \frac{1}{25} \text{ u}^{-2}$ entonces el perímetro (en u) del cuadrado es



$$\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{25}$$

$$2p_{\text{BHMN}} = 4t$$

$$m\angle ABH = m\angle NBL = \theta$$

$$\Delta AHB \cong \Delta LNB \text{ (ALA)}$$

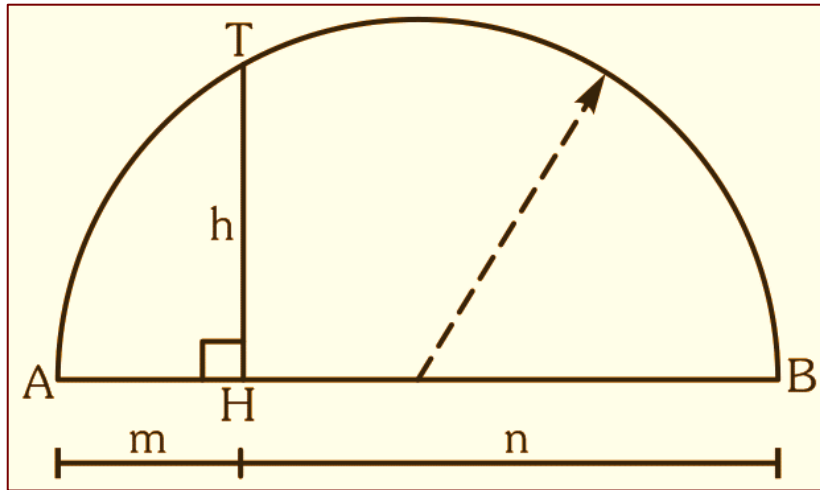
$$AB = BL = c$$

$$\Delta ABC : \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{t^2}$$

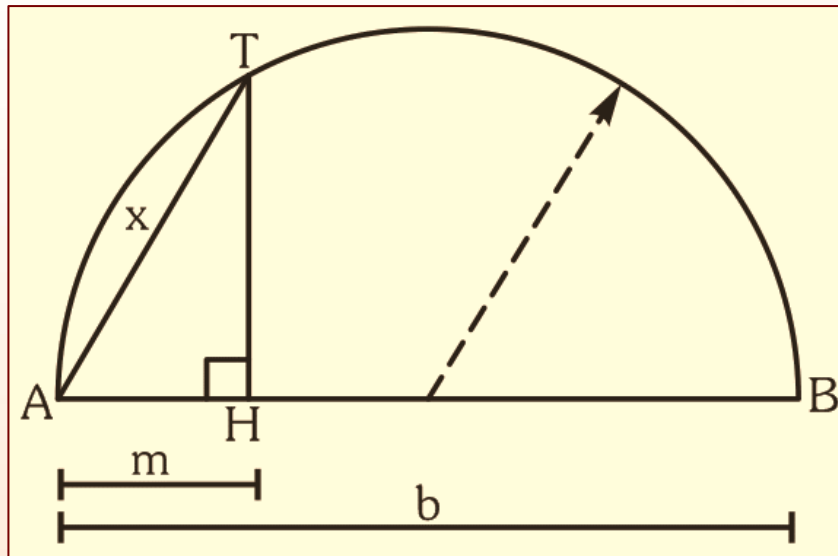
$$\frac{1}{25} = \frac{1}{t^2} \Rightarrow t = 5$$

$$2p_{\text{BHMN}} = 20$$

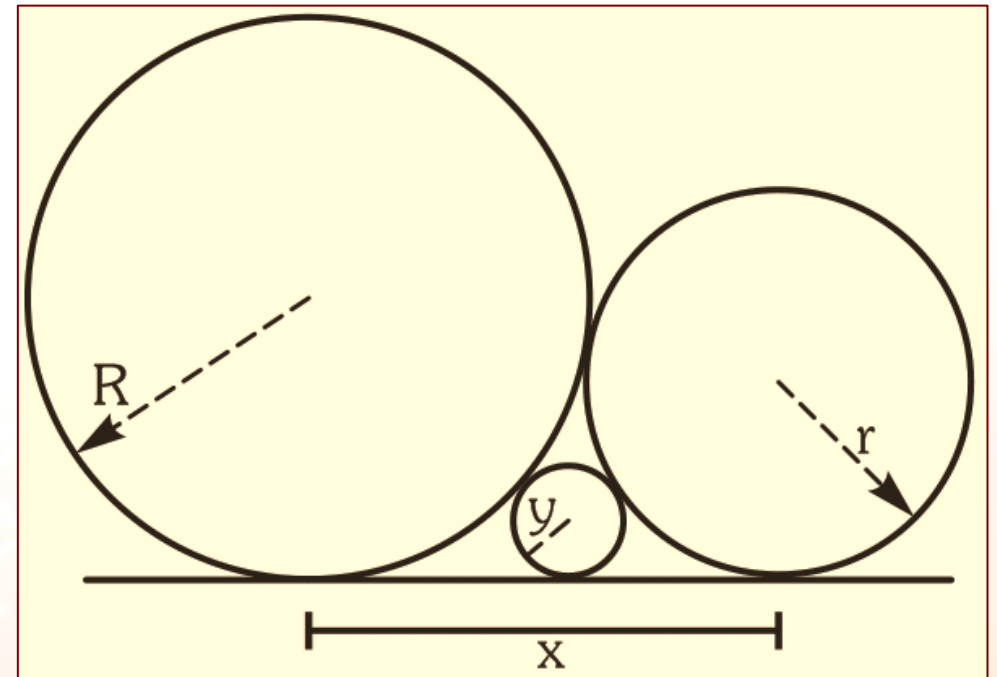
Clave: B



$$x^2 = m \cdot n$$



$$x^2 = b \cdot m$$



$$x = 2\sqrt{R \cdot r}$$

$$\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{r}}$$



ce
pre
UNI

Geometría

GRACIAS

ce
pre
UNI